

3. Приближено решаване на нелинейни уравнения

Общи бележки

Приближеното намиране на корен на уравнението $f(x) = 0$ включва два етапа:

- локализиране на корена
- уточняване на корена със зададена точност ε .

Под локализация на корен ще разбирате намирането на краен затворен интервал $[a, b]$, в краищата на който функцията има различни знаци ($f(a)f(b) < 0$), което ни гарантира, че в интервала има **поне** един корен (предполагаме, че $f(x)$ е непрекъснатата).

Локализирането е по-нестандартна част от решаването на уравнение, но можем да разграничим следните начини:

- **графично**: построяваме графиката на функцията $f(x)$ и намираме пресечната ѝ точка с оста Ox , или записваме уравнението във вида $\varphi(x) = \psi(x)$ и пресичаме графиките на функциите $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ (ако могат да се построят), а абсцисата на пресечната им точка ни дава информация за положението на корена;
- **чрез табулиране**: пресмятаме стойностите на $f(x)$ в точките $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и т.н. (в случая на полином това може да се извърши по схемата на Хорнер), докато намерим две точки, в които функцията има различни знаци.
- **като се използва априорна информация за корена**: физическият смисъл на решаваното уравнение, или поведението на реалния процес, описван с функцията $f(x)$ носи допълнителна информация за положението на корена.

При решаването на задачите ще илюстрираме различните начини за локализация на корена.

Уточняването на корена представлява следното: При предварително намерен интервал $[a, b]$, съдържащ корена x^* и зададено положително число ε , наричано

точност, да се намери точка $\tilde{x} \in [a, b]$, за която е в сила $|x^* - \tilde{x}| \leq \varepsilon$. Тази точка \tilde{x} се приема за приближение на корена x^* .

Следват различни методи за уточняване на корена.

3.1. Метод на разполовяването

Предполагаме, че непрекъснатата функция $f(x)$ има различни знаци в краищата на интервала $[a, b]$, в който е локализиран корена. Идеята на метода се базира на така нареченото “свойство на средата” на една отсечка:

Ако $c = (a + b)/2$ е средата на интервала $[a, b]$, тя е точката, която е най-близко до всички останали точки от интервала. За всяко $x \in [a, b]$ можем да запишем $|x - c| \leq \frac{b - a}{2}$.

На всяка стъпка най-напред се определя средата на текущия интервал: $c = (a_n + b_n)/2$ и текущата точност $\varepsilon = (b_n - a_n)/2$. Ако числото ε_n е достатъчно малко ($\varepsilon_n \leq \varepsilon$), то за решение се приема c_n ; в противен случай пресмятаме стойността на $f(c_n)$ и ако тя не е 0 (това означава, че сме намерили точно корена) продължаваме с онзи от подинтервалите, в краищата на който функцията има различни знаци.

Ако означим $[a_0, b_0] = [a, b]$ началния интервал и работим без закръгляне, то $\varepsilon_n = (b - a)/2^{n+1}$, откъдето можем предварително да определим броя стъпки за достигане на точност ε :

$$\frac{b - a}{2^{n+1}} \leq \varepsilon \Rightarrow 2^{n+1} \geq \frac{b - a}{\varepsilon} \Rightarrow n \geq \left\lceil \log_2 \frac{b - a}{\varepsilon} - 1 \right\rceil,$$

където $\lceil y \rceil = \min n, n \in \mathbb{Z}, n \geq y$.

Пример. По метода на разполовяването да се намери коренът на уравнението $x - \sin(x) = 0,25$ с точност 0,01. Колко итерации гарантират точност 10^{-6} ?

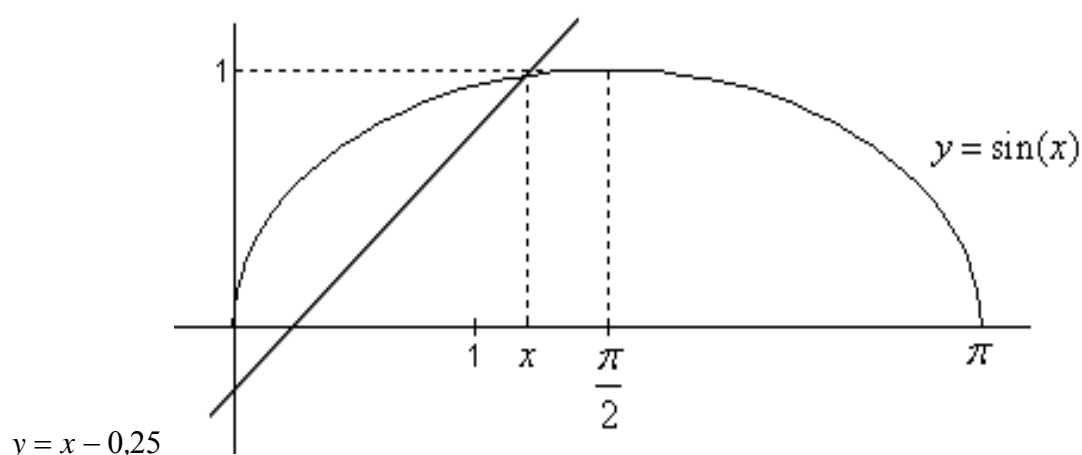
Решение:

Графично ще локализираме корена. Записваме уравнението във вида $x - 0,25 = \sin(x)$ и построяваме графиките на $y = x - 0,25$ и $y = \sin(x)$, които са добре познати.

От долните графики се вижда, че решението (пресечната точка) е между 1 и 1,5, което можем да проверим с непосредствени изчисления:

$$f(1) = 1 - \sin(1) - 0,25 = -0,09147... < 0$$

$$f(1,5) = 1,5 - \sin(1,5) - 0,25 = 0,2525... > 0$$



Коренът на уравнението е локализиран в интервала $[1; 1,5]$. За достигане на точност $\varepsilon = 0,01$ са необходими $\left\lceil \log_2 \frac{1,5-1}{0,01} - 1 \right\rceil = \left\lceil \log_2 50 - 1 \right\rceil = 5$ итерации. Резултатите записваме в следната таблица:

n	a_n (-)	b_n (+)	$c_n = (a_n + b_n)/2$	$\varepsilon_n = (b_n - a_n)/2$
0	1	1,5	1,25 +	0,25 >0,01
1	1	1,25	1,125 -	0,125 >0,01
2	1,125	1,25	1,1875 +	0,0625 >0,01
3	1,125	1,1875	1,15625 -	0,03125 >0,01
4	1,15625	1,1875	1,171875 +	0,015625 >0,01
5	1,15625	1,171875	1,1640625	0,0078125 <0,01

$$f(1,25) = 0,0510... > 0$$

$$f(1,125) = -0,02726... < 0$$

$$f(1,1875) = 0,01006... > 0$$

$$f(1,15625) = -0,009049... < 0$$

$$f(1,171875) = 0,00039... > 0$$

Отговор: За приближение на корена имаме $x^* \approx c_5 = 1,1640625$ с точност 0,0078125.

Очевидно не е необходимо пресмятанията да бъдат извършвани с повече от три знака след десетичната запетая при точност 0,01.

Ако търсим решение с точност $\varepsilon = 10^{-6}$, то трябва да извършим n на брой итерации, където $n \geq \left\lceil \log_2 \left(\frac{0,5}{10^{-6}} \right) - 1 \right\rceil = 18$.

3.2. Метод на хордите

Условията, които трябва да са изпълнени, за да е сходящ методът на хордите са:

- 1) $f \in C^2[a, b]$
- 2) $f(a)f(b) < 0$
- 3) $f'(x), f''(x)$ имат постоянен знак в $[a, b]$.

Тогава итерационният процес:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(p)}(x_n - p); \quad n = 0, 1, \dots$$

е сходящ към единствения корен x^* , където x_0 е онзи край на интервала, за който $f(x_0)f''(x) < 0$, а p -постоянната точка, през която минават всички хорди, т.е. другият край на интервала.

За оценка на грешката имаме:

$$\left| x^* - x_n \right| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_n - x_{n-1}| = \varepsilon_n,$$

където $M_1 = \max_{[a, b]} |f'(x)|$, $m_1 = \min_{[a, b]} |f'(x)|$.

Пример. По метода на хордите да се намери с точност 0,01 коренът на уравнението $x^3 + x - 1 = 0$.

Решение:

Тъй като $f(x) = x^3 + x - 1$ е полином, ще локализираме корена като пресмятаме стойностите на му за целочислени стойности на аргумента. Тъй като $f(0) = -1$ и $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$, то можем да локализираме корен в положителната част на абсцисната ос. Имаме

$$f(1) = 1 + 1 - 1 = 1 > 0, \text{ т.е. } x^* \in [0, 1],$$

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0, \quad f''(x) = 6x > 0 \quad \text{за } x \in (0, 1).$$

Избор на x_0 : $f(0)f''(x) < 0$, откъдето $x_0 = 0$, $p = 1$.

Тогава итерационният процес е:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(1)}(x_n - 1); \quad n = 0, 1, \dots$$

$$M_1 = \max_{[0,1]} |3x^2 + 1| = 4, \quad m_1 = \min_{[0,1]} |3x^2 + 1| = 1,$$

$$\varepsilon_n = \frac{4-1}{1} |x_n - x_{n-1}| = 3|x_n - x_{n-1}|.$$

Изчисленията са представени в следната таблица, като закръглянето е до третия знак след десетичната запетая.

n	x_n	$f(x_n)$	$\varepsilon_n = 3 x_n - x_{n-1} $
0	0	-1	-
1	0,5	-0,375	1,5
2	0,636	-0,107	0,408
3	0,671	-0,027	0,106
4	0,680	-0,006	0,027
5	0,682		0,006 < 0,01

Отговор: $x^* \approx x_5 = 0,682$.

Подробните пресмятания са:

$$x_1 = 0 - \frac{-1}{-1-1}(0-1) = 0 + 0,5 = 0,5$$

$$\varepsilon_1 = 3|0,5 - 0| = 1,5 > 0,01 ; f(0,5) = -0,375$$

$$x_2 = 0,5 - \frac{-0,375}{-0,375-1}(0,5-1) = 0,6363... \approx 0,636$$

$$\varepsilon_2 = 3|0,636 - 0,5| = 0,408 > 0,01 ; f(0,636) = -0,1077$$

$$x_3 = 0,636 - \frac{-0,107}{-0,107-1}(0,636-1) = 0,67118... \approx 0,671$$

$$\varepsilon_3 = 3|0,671 - 0,636| = 0,1055... > 0,01 ; f(0,671) = -0,027$$

$$x_4 = 0,671 - \frac{-0,027}{-0,027-1}(0,671-1) = 0,680$$

$$\varepsilon_4 = 3|0,680 - 0,671| = 0,027 > 0,01 ; f(0,680) = -0,006$$

$$x_5 = 0,680 - \frac{-0,006}{-0,006-1}(0,680-1) = 0,682$$

$$\varepsilon_5 = 3|0,682 - 0,680| = 0,006 < 0,01$$

3.3. Метод на допирателните (на Нютон)

Условията за прилагането на метода на допирателните (метода на Нютон) са същите, както и при метода на хордите. Итерационният процес е:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

като за начално приближение се приема онзи край на интервала, в който е изпълнено $f(x_0)f'' > 0$.

За грешката е валидна оценката:

$$|x^* - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1} |x_n - x_{n-1}|^2,$$

където $M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|$, $m_1 = \min_{[a,b]} |f'(x)|$.

Пример. Да се намери с точност 0,001 коренът на уравнението $x - \sin(x) = 0,25$ по метода на допирателните.

Решение:

Вече локализирахме корена на това уравнение в интервала $[1; 1,5]$. Намираме последователно $f'(x) = 1 - \cos(x)$ и $f''(x) = \sin(x)$, които са положителни за $x \in [1; 1,5]$.

Тогава итерационният процес: $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \sin(x_n) - 0,25}{1 - \cos(x_n)}$ ще е сходящ при $x_0 = 1,5$ (тук $f(x_0) = 0,2525 > 0$).

За оценка на грешката изчисляваме константите

$$m_1 = \min_{[1; 1,5]} |1 - \cos(x)| = 0,4597, \quad M_2 = \max_{[1; 1,5]} |\sin(x)| = 0,9975, \quad M_2 / 2m_1 = 1,0849.$$

Изчисленията са представени в таблицата:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\varepsilon_n = 1,0849(x_n - x_{n-1})^2$
0	1,5	0,2525	0,9293	-
1	1,2283	0,0364	0,6642	0,0801 > 0,001
2	1,1735	0,0014	0,6131	0,0033 > 0,001
3	1,1712			0,000005... < 0,001

Закръгляме до четири знака след десетичната запетая:

$$x_1 = 1,5 - 0,2525 / 0,9293 = 1,2283, \quad \varepsilon_1 = 1,0849(1,2283 - 1,5)^2 = 0,0801,$$

$$f(x_1) = 0,0364, \quad f'(x_1) = 0,6642;$$

$$x_2 = 1,2283 - 0,0364 / 0,6642 = 1,1735, \quad \varepsilon_2 = 1,0849(1,1735 - 1,2283)^2 = 0,0033,$$

$$f(x_2) = 0,0014, \quad f'(x_2) = 0,6131;$$

$$x_3 = 1,1735 - 0,0014 / 0,6131 = 1,1712, \quad \varepsilon_3 = 1,0849(1,1712 - 1,1735)^2 = 0,000005.$$

Отговор: $x^* \approx x_3 = 1,1712$.

Забележка. Ако не закръгляме до четвъртия знак, на третата стъпка бихме имали грешка $5 \cdot 10^{-6}$! (сравни с метод на разполовяване).

3.4. Комбиниран метод

Този метод е комбинация от трите разгледани досега метода. Условието за прилагането му са същите, както при метода на хордите и допирателните, а тъй като на всяка стъпка се получава интервал, съдържащ корена, за оценка на грешката може да се използва по-добрата от оценките при метода на допирателните и метода на разполовяването. Формулите са следните:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(y_n)}(x_n - y_n); \quad f(x_0)f'' < 0$$
$$y_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)}; \quad f(y_0)f'' > 0.$$

За оценка на грешката може да се използва по-добрата от двете оценки:

$$|x^* - y_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}|y_n - y_{n-1}|^2, \quad |x^* - c_n| \leq 0,5|x_n - y_n|,$$

където $c_n = (x_n + y_n)/2$.

Пример. Да се намери с точност 0,0001 коренът на уравнението $x + e^x = 0$ по комбинирания метод.

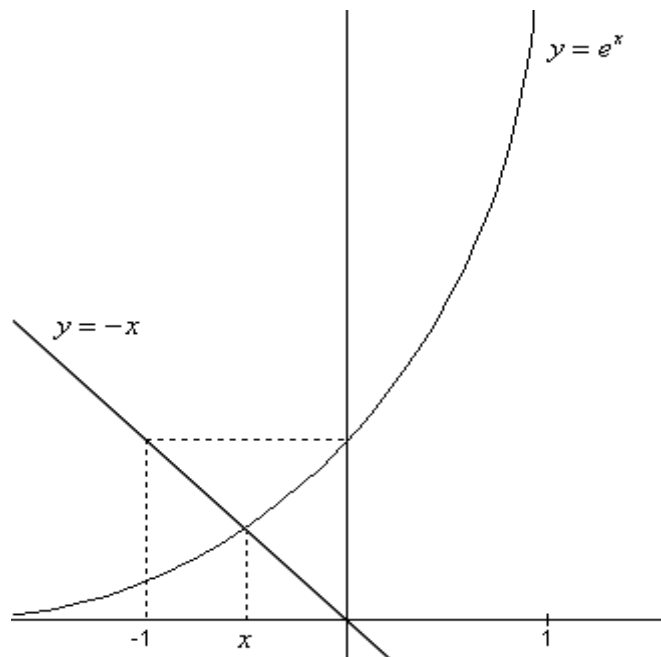
Решение:

За да локализираме корена, записваме уравнението във вида $e^x = -x$ и построяваме графиките на двете функции $y = e^x$ и $y = -x$. От графиките се вижда, че пресечната им точка е в интервала $[-1, 0]$. Да проверим:

$$f(x) = x + e^x; \quad f(-1) = -1 + e^{-1} = -0,63212 < 0, \quad f(0) = e^0 = 1 > 0.$$

Освен това $f' = 1 + e^x > 0$ за $\forall x$ и $f'' = e^x > 0$ за $\forall x$. Следователно комбинираният метод ще е сходящ при $x_0 = -1$ и $y_0 = 0$. За оценка на грешката изчисляваме константите

$$m_1 = \min_{[-1,0]} |1 + e^x| = 1,36788, \quad M_2 = \max_{[-1,0]} |e^x| = 1.$$



Ще пресмятаме едновременно и двете оценки:

$$\varepsilon_{1,n} = \frac{M_2}{2m_1} |y_n - y_{n-1}|^2 \quad \text{и} \quad \varepsilon_{2,n} = |x_n - y_n|/2.$$

Изчисленията са дадени в следната таблица (закръгляме до пет знака след десетичната запетая) :

n	x_n	$f(x_n)$	y_n	$f(y_n)$	$f'(y_n)$	$\varepsilon_{1,n}$	$\varepsilon_{2,n}$
0	-1	-0,63212	0	1	2	-	-
1	-0,61270	-0,07081	-0,5	0,10653	1,60653	0,18276	0,05635
2	-0,56770	-0,00087	-0,56631	0,00130	1,56762	0,00321	0,00069
3	-0,56714		-0,56714			0	0

Отговор: $x^* \approx c_n = (x_n + y_n)/2 = -0,56714$.

Ако не закръгляме $\varepsilon_{1,n} = 5,6 \cdot 10^{-7}$ и $\varepsilon_{2,n} = 1,19 \cdot 10^{-7}$.

3.5. Метод на последователните приближения

Уравнението $f(x) = 0$ се преобразува в еквивалентното му $x = \varphi(x)$. Ако функцията $\varphi(x)$ е такава, че за всяко $x \in [a, b]$ е изпълнено неравенството $|\varphi'(x)| \leq q < 1$, то итерационният процес

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

е сходящ към корена на уравнението $f(x) = 0$ за всяко начално $x_0 \in (a, b)$, като при това е в сила оценката

$$|x^* - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q} |x_1 - x_0|.$$

Ако f' има постоянен знак (например $f' > 0$, в противен случай разглеждаме уравнението $-f(x) = 0$) и $0 < m_1 \leq f'(x) \leq M_1$ за $\forall x \in [a, b]$, то функцията $\varphi(x) = x - f'(x)/M_1$ гарантира сходимост със скорост на геометрична прогресия с частно $q = 1 - \frac{m_1}{M_1} < 1$.

Пример. Да се построи сходящ итерационен процес по метода на последователните приближения (МПП) за намиране на реален корен на уравнението $x^3 + x - 12 = 0$. Да се намери x_3 (трета итерация) по построения метод, като за начално приближение се приеме средата на избрания интервал и се оцени грешката. Колко итерации ще ни гарантират точност 10^{-6} при същото начално приближение?

Решение:

Очевидно коренът на уравнението е положително число (защо?). Табулираме функцията $f(x) = x^3 + x - 12$ за целите положителни числа

x	1	2	3
$f(x)$	-10	-2	18

Така локализираме корена в интервала $[2; 3]$. За да получим сходящ итерационен процес решаваме уравнението спрямо x от x^3 :

$x = (12 - x)^{1/3}$; $\varphi(x) = (12 - x)^{1/3}$. За да докажем сходимостта пресмятаме:

$$\varphi'(x) = \frac{1}{3}(12 - x)^{-2/3} \cdot (-1) = \frac{-1}{3 \sqrt[3]{(12 - x)^2}}$$

$$\max_{[2,3]} |\varphi'(x)| = \max_{[2,3]} \left| \frac{-1}{3 \sqrt[3]{(12 - x)^2}} \right| = \frac{1}{3 \sqrt[3]{9^2}} = 0,077 \approx 0,08,$$

т.е. итерационният процес $x_{n+1} = \sqrt[3]{12 - x_n}$ ще е сходящ със скорост на геометрична прогресия с частно $q = 0,08$ при всеки избор на $x_0 \in [2,3]$.

За да оценим грешката на третото приближение, първо пресмятаме x_1 при $x_0 = 2,5$,
 $x_1 = (12 - 2,5)^{1/3} = 2,117912$.

Тогава $|x^* - x_3| \leq \frac{0,08^3}{1 - 0,08} |2,117912 - 2,5| = 0,00021\dots$; или грешката при третото приближение ще е от порядъка на 0,0002 и е достатъчно да извършваме междинните изчисления до четвъртия знак след десетичната запетая. Изчисленията са дадени в следната таблица:

n	x_n	$\varphi(x_n)$
0	2,5	2,1179
1	2,1179	2,1459
2	2,1459	2,1439
3	2,1439	

Отговор: $x^* \approx x_3 = 2,1439 \approx 2,144$.

Можем да отбележим, че в случая последователните приближения осцилират около корена на уравнението (редицата им не е монотонна) и за оценка на грешката може да се използва “свойството на средата”. Това се дължи на факта, че $\varphi'(x) < 0$ за $\forall x \in [2,3]$.

За да оценим броя итерации за гарантиране на точност 10^{-6} , решаваме спрямо n следното неравенство:

$$\frac{0,08^n}{1 - 0,08} |2,117912 - 2,5| \leq 10^{-6} \quad \text{или} \quad 0,08^n \leq \frac{0,92 \cdot 10^{-6}}{0,382088},$$

откъдето $n \geq \log \frac{0,92 \cdot 10^{-6}}{0,382088} / \log 0,08 = 5,122$,

т.е. на шестата итерация ще имаме гарантирана точност 10^{-6} .

Забележка. При решаването на показателното неравенство използвахме операцията логаритмуване, без да фиксираме основата, т.е. можем да използваме \ln , \lg , \log_2 в зависимост от наличните възможности. Неравенството променя посоката си след деление на $\log 0,08$, защото $\log 0,08 < 0$ при произволна основа > 1 .

Задачи за упражнения

1) Да се изчисли с точност ε коренът на уравнението по указания метод, като предварително се локализира:

а) $x^3 + 2x + 7,8 = 0$, $\varepsilon = 10^{-2}$, разполовяване

б) $x + e^x = 0$, $\varepsilon = 10^{-3}$, хорди

в) $e^x - x^2 - 2x - 2 = 0$, $\varepsilon = 10^{-3}$, допирателни

г) $x^4 - 4x - 1 = 0$, $\varepsilon = 10^{-2}$, разполовяване

д) $x^4 + 2x^3 - x - 1 = 0$, $\varepsilon = 10^{-3}$, комбиниран метод

е) $3x - \cos(x) = 1$, $\varepsilon = 10^{-3}$, допирателни

ж) $x \cos(x) = \ln(x)$, $\varepsilon = 10^{-2}$, разполовяване

з) $\lg(x) = 3x$, $\varepsilon = 10^{-4}$, най-малкия положителен корен с допирателни

и) $x \lg(x) = 1$, $\varepsilon = 10^{-4}$, комбиниран метод

й) $x^4 - 9x^3 - 2x^2 + 120x - 130 = 0$ има точно четири различни, реални корена в $[-6; 10]$.

Да се уточнят и четирите с $\varepsilon = 10^{-3}$, като за всеки корен се използва различен метод.

2) Да се построи сходящ МПП за уточняване на по-малкия корен на уравнението $0,1x^2 - x + 1 = 0$. Колко итерации трябва да се направят, за да се гарантира точност 10^{-3} при $x_0 = 2$? Направете три итерации.

3) Да се построи сходящ МПП за уточняване на корен в дадения интервал. Колко итерации трябва да се направят, за да се гарантира точност 10^{-3} при указаното x_0 ? Направете три итерации за:

а) $x^3 + x - 1000 = 0$, $[9; 10]$; $x_0 = 9,5$

б) $x^2 - x - 0,5 = 0$, $[-1; 0]$; $x_0 = 0,5$

в) $x \lg(x) = 1$, $[2; 3]$; $x_0 = 2,5$

г) $x - \sin(x) = 0,25$, $[1; 1,5]$; $x_0 = 1,25$

4) Известно е, че уравнението $x + \ln(x) = 0$ има корен $\alpha \approx 0,5$. За уточняването му са предложени четири итерационни формули:

А) $x_{n+1} = -\ln(x_n)$, Б) $x_{n+1} = \exp(-x_n)$, В) $x_{n+1} = 0,5(x_n + \exp(-x_n))$,

Г) $x_{n+1} = \sin(x_n) + 0,25$.

а) коя от горните формули може да се използва?

б) да се направят три итерации по най-бързата.

5) Да се докаже, че итерационният процес $x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_k + \frac{a}{x_k} \right)$ при $a > 0$, за пресмятане

на \sqrt{a} има квадратична скорост на сходимост. Като се използва тази формула, да се пресметне $\sqrt{10}$ с четири верни знака (формула на Херон).

6) Да се изведе итерационна формула за пресмятане на $\sqrt[n]{a}$ като се построи метод на Нютон за решаване на уравнението $x^n - a = 0$.